

MIMO 伝搬チャネルモデリング Part II

- クロネッカーモデルに関する考察 -

唐沢 好男

電気通信大学 先端ワイヤレスコミュニケーション研究センター

1. はじめに

MIMOは送受信にアレーアンテナを有する構成であるため、情報を並列に伝送することで、大容量通信を実現する(マルチストリーム伝送)。また、送受信のアレーをダイバーシチブランチと見立てることにより、高信頼な情報伝送を実現する(シングルストリーム伝送、時空間符号化伝送)。このような特長のため、無線LAN、移動通信、ITSなど幅広い分野への応用に期待を集め、研究開発が盛んになっている。

MIMOの情報伝送能力はチャネル容量やBERなどによって評価されるが、本質的な意味で、その性能限界は伝搬チャネルの特性を知ることによって決定する。周波数フラットフェージングが支配的な狭帯域情報の伝送では、チャネル応答行列Aの特異値すなわち行列 AA^H の固有値(上付添字Hは複素共役転置)の定量的把握が全てであるといっても良いであろう。このように、MIMOの研究においては電波伝搬の研究の位置付けは極めて重要なものであり、その成果を活かしたチャネルモデリングが伝搬研究とシステム開発の橋渡しをするものとなる。

MIMO伝搬チャネルモデリングの研究は多岐に渡っているが、基本となるレイリーフェージング環境でのモデリングについては、文献[1]にまとめている。文献[1]では取り上げなかったが、送受信双方の空間相関の性質を取り入れたシミュレーションモデルであるクロネッカーモデルが提案されており[2], [3]、MIMO評価の規範モデルとなりつつある。一方、クロネッカーモデルにも限界があり、送受信でDOD(送信側から見たパスの方向)とDOA(受信側から見たパスの方向)が一對一に対応するような比較的パス数の少ない環境[4]や、チャネルの途中にパスが集約され、送受信周囲においてマルチパスリッチであるにも関わらず、チャネルの第一固有値のみが卓越する環境(キーホール環境[5]等)には、適用が難しくなる。

本稿では、上記後者の点に焦点を絞り、クロネッカーモデルの拡張という視点で、考察を行う。

2. マルチパスリッチ環境とキーホール

図1に挙げる2つの環境を比較する。(a)は通常のいわゆるマルチパスリッチ環境である。送信側の空間相関はDODによって、受信側の空間相関はDOAによって決まる。散乱構造が十分密に多重化されていれば、この空間相関は相手側のアンテナパターンに依存しなくなる(この考えにたったモデルが後に説明するクロネッカーモデル)。ここまでの説明は、キーホールによって結ばれた2つのマルチパス環境の特性にも共通する。しかし、MIMOのチャネル解析から明らかなように、前者は複数個の(値が0でない)固有値が存在するが、後者は、その数が一つになってしまう。後者の環境はキーホール環境、そのモデルはキーホールモデルと呼ばれる[5]。キーホール環境ではMIMOの特徴の一つであるマルチストリーム伝送ができなくなる。では、図1(a)と(b)の違いを表現する伝搬パラメータは何であろうか?従来の伝搬モデルで用いられる空間相関(送信点周り、及び、受信点周りでの)では不十分であることは明らかである。

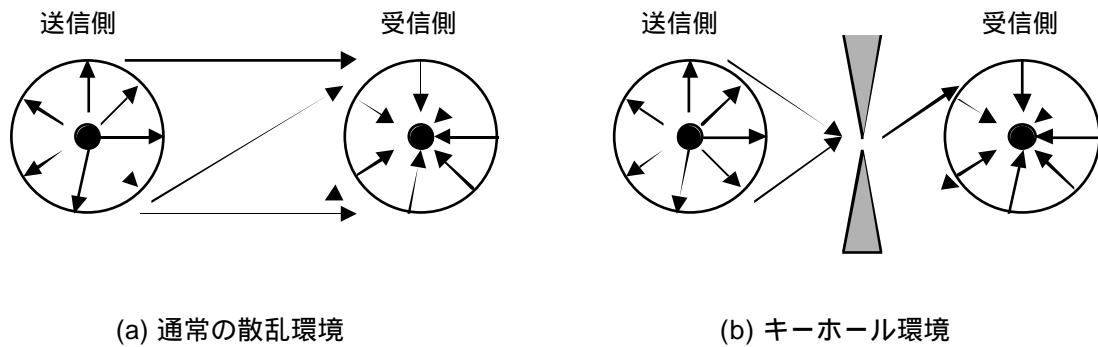


図1 マルチパスリッチ環境の2つの例

ところで、キーホール環境は実際に問題になっているのであろうか？トンネルで結ばれた環境でのキーホール現象発生への報告は有るもののあまり現実的な問題にはなっていない。小さな窓を介した屋外から屋内への（あるいはその逆の）伝搬では、キーホール現象も考えられるが、窓の大きさが波長に比べて十分大きい場合には、顕著に現れては来ないであろう。このように考えると、キーホール問題は電波伝搬の研究においてあまり重要ではない無いと結論されるかも知れない。

一方、MIMOで運用されるあるエリアのサービスを、リピータを介して、別の閉所空間に拡張したいといった要求も出てくると考えられる。その場合には、MIMOの高機能性を失わせないために、最小限の並列伝送型リピータを用いることになる。このようなシステムでのチャネルはマルチキーホールモデルで表現できる環境になる。このチャネルモデルの構築には、キーホールモデルの追求や拡張が必要になる。筆者等は、このような視点から、キーホールを含む環境の伝搬モデル確立が重要であると認識している。

3 . MIMO チャネルのパス間相関

クロネッカーモデルの前提となる、MIMOチャネルパス間相関行列の性質をまとめる。送信アンテナ数： N_t 、受信アンテナ数： N_r とするとMIMOチャネル応答行列： A は

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_t} & \dots & a_{1N_t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n_t} & \dots & a_{2N_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_r1} & a_{n_r2} & \dots & a_{n_r n_t} & \dots & a_{n_r N_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_r1} & a_{N_r2} & \dots & a_{N_r n_t} & \dots & a_{N_r N_t} \end{bmatrix} \quad (1)$$

パス間相関（パス a_{ij} と a_{mn} の相関）は、相関係数と平均電力 P_R を用いて、

$$\langle a_{ij}^* a_{mn} \rangle = P_R \quad (2)$$

と表し、相関係数には、必要に応じて必要な添字を置く（以下、受信側空間相関を表す相関係数であれば r 、送信側であれば t ）。MIMOチャネルパス間相関行列： C は次式となる。

$$B = \mathbf{b}\mathbf{b}^H \quad (3)$$

$$\mathbf{b} = \text{vec}(A) = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \dots, \mathbf{a}_{n_t}^T, \dots, \mathbf{a}_{N_t}^T)^T \quad (4)$$

$$\mathbf{a}_{n_t} = (a_{1n_t}, a_{2n_t}, \dots, a_{n_r n_t}, \dots, a_{N_r n_t})^T \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{B} \rangle \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_R \begin{bmatrix} 11 & \dots & 1N_t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_t1 & \dots & N_tN_t \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$p_{ij} = \begin{cases} \{i-j\}d_t \\ \{i-j\}d_r \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & r(d_r) & \dots & r\{(N_r-1)d_r\} \\ r^*(d_r) & 1 & \dots & r\{(N_r-2)d_r\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*\{(N_r-1)d_r\} & r\{(N_r-2)d_r\} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

式(7b)は送信側、受信側ともニアレーを想定し、各々アンテナ間隔を d_t, d_r としている。式(7)で与えられるモデルの基本的な考え方は、パス間の相関が送信側空間相関と受信側空間相関の積で表されるモデル(図2)であり、ある意味で、自然な発想のモデルである。

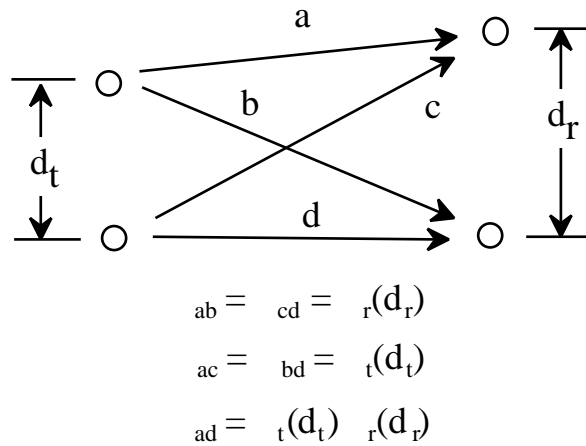


図2 パス間の相関が送信側空間相関と受信側空間相関の積で表されるモデル

式(7)は、送信側の空間相関行列 \mathbf{P}_t と受信側の空間相関行列 \mathbf{P}_r を用いて、

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N_t N_r} \mathbf{P}_t \mathbf{P}_r \quad (8)$$

とも表される [4]。ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は行列のクロネッカー積である。($\mathbf{P}_t, \mathbf{P}_r$ の式表現は、後に示す (15), (16)式)

2 × 2 のケースでは、

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$C = P_R \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & r & & & \\ & & 1 & & \\ & & & t & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$r = r(d_r), \quad t = t(d_t) \quad (11)$$

となる。

相関係数の具体的な式については、文献[6]などにまとめられているように、環境に応じて使い分ければ良い。レイリーフェージング環境を対象とする場合には、平均電力角度プロファイルが () で与えられる場合の空間相関係数を求める基本式は、

$$\langle r(x) \rangle = \frac{1}{P_r} \int_0^{2\pi} \langle r(\theta) \rangle \exp(jk x \sin \theta) d\theta \quad (12)$$

であるので、例えば、DOD (またはDOA) が θ_0 を中心として、比較的狭い広がり () をもつ正規分布の場合には、次式になる。

$$\langle r(x) \rangle = \exp \left(jk x \sin \theta_0 - \frac{k^2 x^2 \cos^2 \theta_0}{2} \right) \quad (13a)$$

$$= \exp \left(-\frac{k^2 x^2}{2} \right) \quad (\text{when } \theta_0 = 0) \quad (13b)$$

4 . クロネッカーモデルとその意味

統計的な環境表現である式(7)のモデルに対して、瞬時環境を生成する伝搬モデル (シミュレーションモデル) がクロネッカーモデルである。クロネッカーモデルは次式で与えられる[2], [3]。

$$A = \mathbf{r}_r^{1/2} G \left(\mathbf{r}_t^{1/2} \right)^T \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{r}_r は受信側における空間相関行列 ($N_r \times N_r$)、 \mathbf{r}_t は送信側における空間相関行列 ($N_t \times N_t$)、 G は各要素 g_{ij} が iid の複素正規分布 ($\langle |g_{ij}|^2 \rangle = 1$) となる行列 ($N_r \times N_t$) であり、 \mathbf{r}_r 、 \mathbf{r}_t については、次式で与えられる。

$$r = \langle AA^H \rangle \quad (15a)$$

$$= N_t \begin{bmatrix} 1 & r(d_r) & \dots & r\{(N_r-1) d_r\} \\ r^*(d_r) & 1 & \dots & r\{(N_r-2) d_r\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*\{(N_r-1) d_r\} & r^*\{(N_r-2) d_r\} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (15b)$$

$$t = \langle A^H A \rangle \quad (16a)$$

$$= N_r \begin{bmatrix} 1 & t(d_t) & \dots & t\{(N_t-1) d_t\} \\ t^*(d_t) & 1 & \dots & t\{(N_t-2) d_t\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^*\{(N_t-1) d_t\} & t^*\{(N_t-2) d_t\} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (16b)$$

(15a), (16a)式は一般式であり、(15b), (16b)式は、送受信共に素子アンテナが直線上等間隔（送信側 d_r , 受信側 d_r ）に配置されている場合である。(15)式は

$$r = \langle AA^H \rangle = \frac{1}{r} \left\langle G \begin{pmatrix} 1/2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ t \end{pmatrix}^* G^H \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ r \end{pmatrix} \quad (17)$$

となり、 $\langle \cdot \rangle$ 部分が単位行列のスカラー倍になることによって、送信局周りの相関特性が現れてこない。(16)式は逆に、受信局周りの相関特性が現れてこない。

文献[4]では、(17)式の一般化として、送信パターンが送信ウェイトで制御された場合でも、受信側の空間相関にこのウェイトの影響が現れないことを証明している。これはすなわち、受信側の空間相関特性は、送信側のアンテナパターンによらず、受信側のDOA特性で決まってしまうこと（送信側の空間相関も同様）を意味している。これがクロネッカーモデルの特徴であり、限界でもある。図3はこの特徴をまとめたものである。

最も簡単な 2×2 のケースで、かつ、(13b)式で与えられるような実数の相関係数を考えると、

$$r = 2 \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}, \quad t = 2 \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (18a, b, c)$$

であるので、チャンネル応答行列Aは次式となる。

$$A = 2 \begin{bmatrix} Q_t^+(Q_r^+g_{11} + Q_r^-g_{21}) + Q_t^-(Q_r^+g_{12} + Q_r^-g_{22}) & Q_t^-(Q_r^+g_{11} + Q_r^-g_{21}) + Q_t^+(Q_r^+g_{12} + Q_r^-g_{22}) \\ Q_t^+(Q_r^+g_{11} + Q_r^+g_{21}) + Q_t^-(Q_r^-g_{12} + Q_r^+g_{22}) & Q_t^-(Q_r^-g_{11} + Q_r^+g_{21}) + Q_t^+(Q_r^-g_{12} + Q_r^+g_{22}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

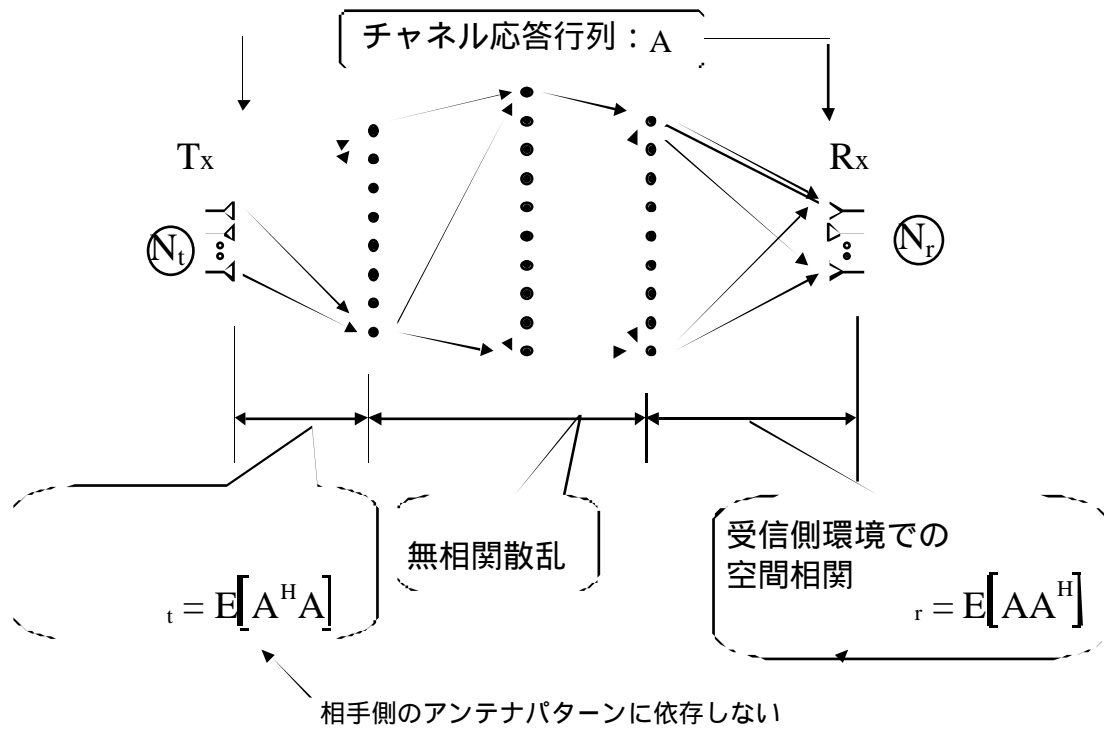


図3 クロネッカーモデルで表現できる一般的な環境

ここで、

$$Q_t^\pm = \frac{1}{2}(\sqrt{1+t} \pm \sqrt{1-t}) \quad (20a)$$

$$Q_r^\pm = \frac{1}{2}(\sqrt{1+r} \pm \sqrt{1-r}) \quad (20b)$$

パス間相関行列Cは、やや煩雑な計算の後、次式となる。

$$C = \text{vec}(A) \{\text{vec}(A)\}^H$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & r & t & t r \\ r & 1 & t r & t \\ t & t r & 1 & r \\ t r & t & r & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

これは(10)式の P_R を1にしたものと同じ(ここでは相関係数を実数としているので、(10)式にある、複素共役*は外れている)である。

このようにして、 2×2 MIMOのクロネッカーモデルが、2節で述べたような統計モデル(式(10))を満たしていることを確かめることができる。一般的な $N_t \times N_r$ MIMOが、同様に式(7)を満たすのであるが、上記以外は、このアプローチで確認するのは現実的では無い(文献[3]では、上記 2×2 のブランチ毎の平均電力が異なる場合(本ケースをやや一般化しているが、本質は同じ)について数式を示しているが、(21)式を出すために5ページを費やしている)。

5. 有相関チャネルにおける最大固有値の確率分布

クロネッカーモデルで生成されるチャネルの固有値（より正確には AA^H の固有値） $\lambda_1 \sim \lambda_{N_{\min}}$ ($N_{\min} = \min(N_t, N_r)$)の確率分布はどうなるであろうか？

文献[7]では、送信側空間相関が無相関、受信側空間相関が有相関のケースに関して、第一固有値の確率密度分布を、近似的にはあるが精度良く求める方法を示している。これは、両側有相関の場合にもそのまま拡張できる構造になっている。以下、文献[7]の方法を、拡大適用してみる。

式(7)で与えられる $N_t N_r \times N_t N_r$ の行列の固有値を $\lambda_1 \sim \lambda_{N_t N_r}$ とする。このときの最大固有値の分布（確率密度関数 f_{λ_1} 、累積分布関数 F_{λ_1} ）は、最大比合成ダイバーシチの理論に結び付けると、次式で近似できる。

$$f_{\lambda_1}(\lambda_1) = \frac{1}{N_t N_r} \prod_{j=1}^{N_t N_r} \frac{\exp(-\lambda_1 / \mu_j)}{\sum_{k=1}^{N_t N_r} \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_j} \right)} \quad (22)$$

$$F_{\lambda_1}(\lambda_1) = 1 - \prod_{j=1}^{N_t N_r} \frac{\sum_{k=1}^{N_t N_r - j} \exp(-\lambda_1 / \mu_j)}{\sum_{k=1}^{N_t N_r} \left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{1}{\mu_j} \right)} \quad (23)$$

$$\mu_j = \lambda_j \left(\frac{1}{\lambda_1} \right) / N_t N_r \quad (24)$$

送受信の片側有相関の場合には(24)式中の第一固有値の平均値 $\langle \lambda_1 \rangle$ を精度よく求める近似式が得られているが[7]、両側有相関の場合については、良い計算式が得られていない。現時点においては、シミュレーションによって求めるしか無いが、良い計算式が得られた段階で、(22), (23)式の有用性が増すことになる。

図4は、4x4のMIMOについて、空間相関が送受信とも0.3、及び0.9 ($\rho_i(d_i) = \rho_i(d_i)$ の値として定義、行列要素に含まれる $\rho_i(2d_i)$, $\rho_i(3d_i)$ 等については、式(13b)で計算)について、各々の第1固有値と第2固有値(λ_1 と λ_2)を示している。(23)式で求めた第1固有値の計算値も示している。確率が小さい部分でややずれが目立つが、最大比合成伝送や時空間符号化伝送において、誤差が生じている部分の影響が小さいチャネル容量を求めるようなケースには適用できるであろう。

相関が有る場合のチャネルにおける第2固有値以下の確率分布を求めることは容易で無さそうに思える。iid固有値分布の近似的計算手法を提示している文献[8]にヒントが有るかも知れない。これについては、今後の課題としたい。

6. クロネッカーモデルが適用できないケース

送受の相関の性質から明らかなように、あるいは、先にも述べたように、通常のマルチパス環境ではクロネッカーモデルで考えるのが、最も自然な発想である。この環境は、マルチパス波が十分多い数だけ存在し、かつ、チャネル応答行列の固有値もアンテナ数に応じて存在する環境である。ところが次のような環境では、固有値の数が、アンテナ数を下回り、クロネッカーモデルでの説明ができなくなる。具体的には、

- 1) キーホールモデル及びそれに類似の環境
 - 2) パスが完全分離できる環境 (DOD/DOAが一対一対応し、かつ、パス数が少ない環境)
- などである。2)については、文献[4]で、議論されているので、ここでは1)について考察したい。

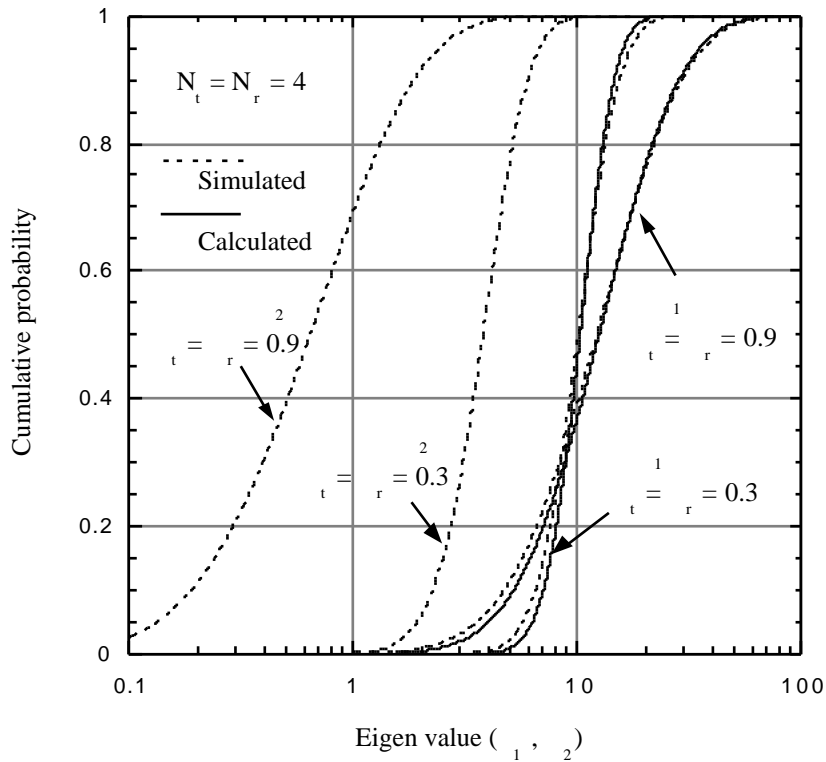


図4 クロネッカーモデルによる4x4 MIMOの固有値のシミュレーション結果と最大固有値の推定値

6.1 キーホールモデル及びそれに類似の環境

図1(a)は、クロネッカーモデルで表現できる一般的な環境を、同図(b)は送受信各々のサイトにおける空間相関特性が同じでもチャンネル応答行列の固有値の統計的性質が異なるケース(キーホール効果)を表している。

図5に示すように、送受信点があるエリアをX, Yとすると、キーホールやそれに近い環境をクロネッカーモデルを拡張して表現するためには、送信エリア(X)、受信エリア(Y)での空間相関のみならず、伝搬途中環境の伝搬構造を含めて、総合的な性質把握のために、次式で与えられるような空間相互相関特性の概念の導入が必要であろう。これをまとめると、

Y領域側空間相関(図5(a))

$$r_y(y) = \langle a^*(x_0, y) a(x_0, y + y) \rangle / P_R \quad (25)$$

X領域側空間相関(図5(b))

$$r_x(x) = \langle a^*(x, y_0) a(x + x, y_0) \rangle / P_R \quad (26)$$

空間相互相関 (図 5 (c))

$$\hat{r}_y(x) = \langle a^*(x_0, y) a(x_0 + x, y) \rangle / P_R \quad (27a)$$

$$\hat{r}_x(y) = \langle a^*(x, y_0) a(x, y_0 + y) \rangle / P_R \quad (27b)$$

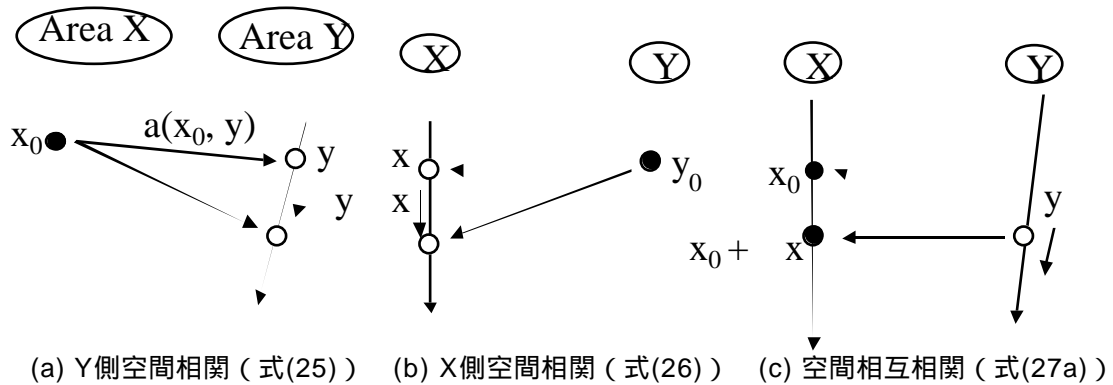


図 5 片側空間相関と空間相互相関

送信側及び受信側空間相関 (式 (25), (26)) では、図 1 に示した通常モデルとキーホールモデルの違いが見えてこないが、空間相互相関を表す式(27a, b)には明らかな違いが現れてくる (単一キーホールの場合は、空間相互相関係数は 1 になる)。具体的なモデル化 (= クロネッカーモデルにどう反映させるか) を考えてみたい。

図 1 (b) のキーホールモデルは、クロネッカーモデルの拡張として、(14) 式の iid 行列 G を次のように置き換えてみると良いであろう。

$$G = \mathbf{g}_r \mathbf{g}_t^T \quad (28)$$

$$\mathbf{g}_r = [u_1, u_2, \dots, u_{N_r}]^T \quad (29a)$$

$$\mathbf{g}_t = [v_1, v_2, \dots, v_{N_t}]^T \quad (29b)$$

個々の要素 u, v は独立な複素ガウス分布、すなわち iid である。このようにして得たキーホール拡張クロネッカーモデル (式の形は(14) 式と同じ) は (15), (16) 式で与えられる送受信空間相関特性を維持している (証明略)。

上記で得られるチャネル応答行列 A の任意の要素 a_{ij} の振幅 $r = |a_{ij}|$ の分布は、レイリー分布とは異なり、独立なレイリー分布の積の分布となる。この分布 (f : PDF, F : CDF) は、次の式で表される。

二つのレイリー分布を、各々自乗平均が $2^{-1}, 2^{-2}$ となる分布 f_1, f_2 とすると、

$$f(r) = \int_0^r f_1(x) f_2\left(\frac{r}{x}\right) \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{\frac{2}{1} \frac{2}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{1} + \frac{\left(\frac{r}{x}\right)^2}{2} \right) \right\} dx \\
&= \frac{r}{\frac{2}{1} \frac{2}{2}} K_0 \left(\frac{r}{1} \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{30}$$

$$F(r) = 1 - \frac{r}{1} \frac{1}{2} K_1 \left(\frac{r}{1} \frac{1}{2} \right) \tag{31}$$

ここで、 K_0, K_1 は0次、1次のKベッセル関数（第2種変形ベッセル関数）である。

図5は、4x4のMIMOについて、空間相関が送受信とも0.3, 0.7, 0.9 ($\rho_t = \rho_r$:定義は図4の場合と同じ)について、キーホール環境での第1固有値の分布のシミュレーション値（実線）を表している（第2固有値以下は0）。図には、要素の電力分布（式(31)を $P_0 = r^2$ で電力に変換した P_0 の分布）のシミュレーション値（点線）と平均電力 $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}$ を各々1とした計算値（実線）、振幅がレイリー分布するときの電力分布（ P_0 :指数分布）の計算値（点線）を併せて示している。図より、要素の分布は式(31)に完全に一致しており、式の妥当性が確認できた。このようにモデルを変形することにより、任意の相関係数で与えられるキーホール環境を実現できる。図の固有値（ λ_1 ）を理論的に求める計算式は、今後の課題である。

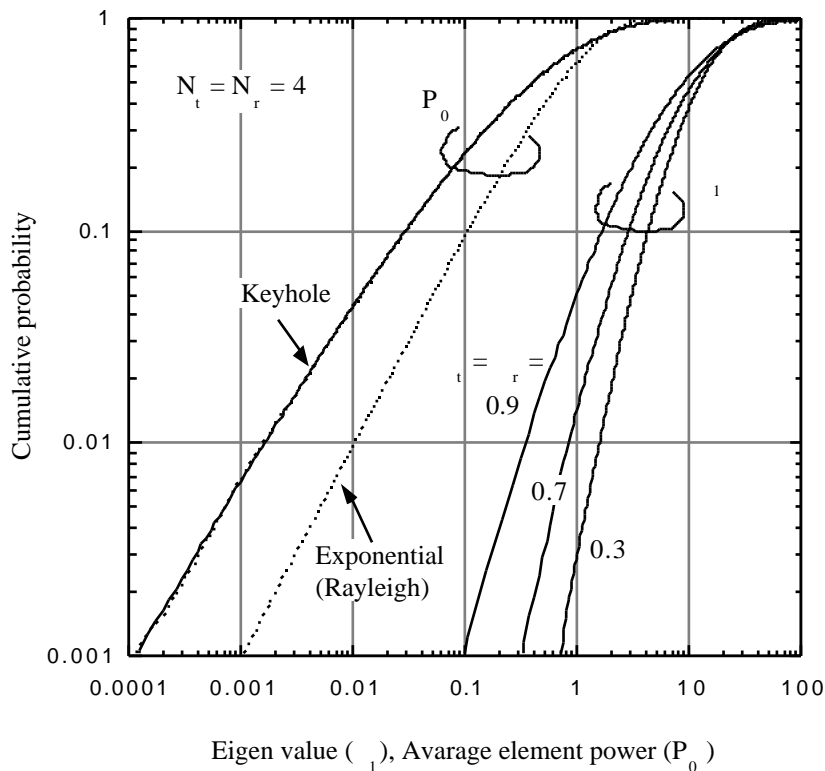


図5 キーホール環境での第一固有値及びチャネル応答行列要素（電力）のCDF

7. まとめ

本稿では、「移動通信の伝搬」における「レイリーフェージング」と同じような意味での「MIMO伝搬チャネル」の基礎である「クロネッカーモデル」に焦点を当てて、その性質の洗い出しをした。本文でも述べているように、これで全て解決しているわけではない。空間相互相関の概念に基づくマルチキーホール環境でのクロネッカーモデルの拡張など、検討課題も多い。

最後に、本稿に提示したシミュレーションと理論計算には、本学大学院博士後期課程学生鶴田誠君の協力を得た。これを記して感謝の意を表したい。

参考文献

- [1] 唐沢好男, "MIMO伝搬チャネルモデリング," 信学論B, vol. J86-B, 9, pp. 1706-1720, 2003.
- [2] K.I. Pedersen, J.B. Andersen, J.P. Kermoal, and P. Mogensen, "A stochastic multiple-input-multiple-output radio channel model for evaluation of space-time coding algorithms," IEEE VTC Fall 2000, Sept. 2000.
- [3] J.P. Kermoal, L. Schumacher, K.I. Pedersen, P.E. Mogensen, and F. Fredriksen, "A stochastic MIMO radio channel model with experimental validation," IEEE Jour. Selec. Areas Commun., vol.20, 6, pp. 1211-1226, 2002.
- [4] E. Bonec, H. Ozcelik, M. Herdin, W. Weichelbelger, J. Wallace, "Deficiencies of a popular stochastic MIMO radio channel model," WPMC '03, TA11-1, Yokohama, Oct. 2003.
- [5] D. Chizhik, G.J. Foschini, M.J. Gans, and R.A. Valenzuela, "Keyholes, correlations, and capacities of multielement transmit and receive antennas," IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 1, no. 2, pp. 361-368, 2002.
- [6] 唐沢好男, デジタル移動通信の電波伝搬基礎, コロナ社, 2003.
- [7] 付鑑宇, 谷口哲樹, 唐沢好男, "アレーアンテナブランチ間に相関が存在する場合のMIMOチャネル相関行列の最大固有値分布推定," 信学論B, vol. J86-B, no. 9, pp. 1971-1980, 2003.
- [8] 谷口哲樹, 沙深, 唐沢好男, "On statistical distribution of eigenvalues of correlation matrices in i.i.d. MIMO Rayleigh fading channels," 信学技報, AP-.P2005-1, pp.1-6, 2005.