第 517 回 URSI-F 会合資料
2007 年 9 月 21 日

相関のある細矢の M 分布に従う 2 変量の結合確率分布 (その 2)

Bivariate Joint Probability Distributon for Correlated Hosoya-M Distributed Variables (Part II)

真鍋 武嗣 (大阪府立大学), 中條 渉 (情報通信研究機構)

1 はじめに

10GHz 以上の無線回線設計で問題となる強降雨強度・短時間率領域を含めて広い累積時間領域にわたって降雨強度の統計累積分布を良く近似する分布として細矢の M 分布 [1, 2] が知られており降雨減衰累積分布の推定に用いることができる [3, 4]．この分布を地上や衛星回線のダイバーシティ計算に用いようとする場合，多変量の結合確率分布が必要となる．著者等は既に，2 分岐ダイバーシティ計算に必要な細矢の M 分布に従う相関のある 2 変量の結合確率分布の計算法について提案している [5] が，各変量の標準偏差 σ と平均値 m の比で定義される変動係数 ($\delta = \sigma/m$) の適用範囲が $1 \leq \delta \leq 5$ に限定されていたため，日本国内で一般的な見られる降雨強度累積分布には適用可能であったが，世界の各地でみられる極端な降雨強度累積分布までわたって適用できるものではなかった．そこで，本稿では，[5] の計算方法を広い変動係数の範囲 ($0.3 \leq \delta \leq 50$) に適用可能となるように拡張する．

2 細矢の M 分布

x を変量とする細矢の M 分布 [1] の確率密度関数は, 次式で与えられる Moupfouma 分布 [6][7]

$$f_{mp}(x) = \frac{p}{x} e^{-ux} \left(\frac{b}{x} + u \right) \tag{1}$$

において，パラメータ b を $b = 1$ と置いた

$$f(x) = \frac{p}{x} e^{-ux} \left(\frac{1}{x} + u \right) \tag{2}$$

で与えられ，その確率分布 (累積分布) 関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \int_x^{\infty} f(x')dx' = \frac{p}{x} e^{-ux} \tag{3}$$

で与えられる．ここで変量 x の変域は ($x^* \leq x < \infty$) であり，x^* は $F(x^*) = 1$ の条件より，超越方程式

$$p = x^* \exp(ux^*) \tag{4}$$

の解として与えられる．M 分布に従う変量 x の平均値を m，分散を σ^2 とすると，u, p, x^* と m, σ の間には次のような関係がある [1].

$$u = \frac{2x^*}{\sigma^2 + m^2 - x^{*2}}, \tag{5}$$

$$x^* = \sigma g(t), \tag{6}$$

$$t = \frac{m}{\sigma}. \tag{7}$$

ここで，$g(t)$ は変動係数 ($\delta = \sigma/m$) の逆数 $t = m/\sigma$ の関数であり，$g(t)$ の $0.01 \leq t \leq 1$ および，$0.01 \leq t \leq 3$ における近似式が，それぞれ文献 [1] および [4] に与えられている．

3　相関のある 2 つの細矢 M 変量の結合確率分布

細矢の M 分布 $f_i(x_i)$ に従う確率変量 x_i を等価標準正規分布変量 z_i に変換する Rosenblatt 変換 [8][9] を次式で定義する．

$$z_i = \Phi^{-1}[F_i'(x_i)]. \tag{8}$$

ここで，

$$F_i'(x_i) = 1 - F_i(x_i) = 1 - \int_{x_i^*}^{x_i} f_i(x)dx \tag{9}$$

であり，$\Phi(z_i)$ は，等価標準正規分布

$$\phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_i^2} \tag{10}$$

に関して次式で定義される標準正規確率分布関数である．

$$\begin{aligned}\Phi(z_i) &= \int_{-\infty}^{z_i} \phi(z)dz & (11)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} e^{-\frac{1}{2}z}dz & (12)\\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{z_i}{\sqrt{2}}\right)\right] & (13)\end{aligned}$$

但し，$\mathrm{erf}(x)$ は誤差関数である．従って，

$$\begin{aligned}z_i &= \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}[2F_i'(x_i) - 1] & (14)\\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}[1 - 2F_i(x_i)] & (15)\\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(1 - 2\frac{p_i}{x_i}e^{-u_i x_i}\right) & (16)\end{aligned}$$

である．但し $\mathrm{erf}^{-1}(x)$ は逆誤差関数である．

細矢の M 分布に従う互いに相関のある 2 変量 x_1, x_2 にそれぞれ Rosenblatt 変換を行うことにより，相関のある等価結合標準正規変量 z_1, z_2 に変換できるとすると，x_1, x_2 の結合確率密度関数 $f(x_1, x_2)$ は，次式で表すことができる．

$$f(x_1, x_2) = \phi(z_1, z_2, \rho_z)\frac{f_1(x_1)f_1(x_2)}{\phi(z_1)\phi(z_2)} \tag{17}$$

ここで，$\phi(z_1, z_2, \rho_z)$ は，z_1, z_2 の従う等価結合標準正規確率密度関数

$$\phi(z_1, z_2, \rho_z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_z^2}} \exp\left[-\frac{z_1^2 - 2\rho_z z_1 z_2 + z_2^2}{2(1-\rho_z^2)}\right] \tag{18}$$

であり，ρ_z は z_1 と z_2 の相関係数

$$\rho_z = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z_1 z_2 \phi(z_1, z_2, \rho_z)dz_1 dz_2 \tag{19}$$

である．ここで，結合確率分布が結合確率密度関数 $f(x_1, x_2)$ で与えられる細矢 M 変量 x_1 と x_2 の間の相関係数 ρ は

$$\rho = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\int_{x_1^*}^{\infty}\int_{x_2^*}^{\infty}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)f(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \tag{20}$$

但し，m_1, m_2 および σ_1^2, σ_2^2 は，それぞれ x_1, x_2 の平均値および分散である．ここで，(20) に，(17) を代入し，Rosenblatt 変換 (8) により積分変数を変換することにより次式が得られる．

$$\rho = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[F_1^{-1}(1 - \Phi(z_1)) - m_1][F_2^{-1}(1 - \Phi(z_2)) - m_2]\phi(z_1, z_2, \rho_z)dz_1 dz_2 \tag{21}$$

従って，x_1, x_2 の相関係数 ρ が与えられている場合，(21) から対応する等価結合標準正規分布の相関係数を ρ_z 求めることができれば x_1, x_2 の結合確率分布を (17) により計算することができる [10]．

しかし，細矢の M 分布の場合もふくめ一般に，与えられた 2 変量の相関係数 ρ から ρ_z を解析的に求めることは困難である．一方，(21) の右辺は x_i の変動係数 $\delta_i = \sigma_i/m_i$ またはその逆数である $t_i = 1/\delta_i$

Table 1:

	$0.2 \le \rho \le 1$	
	$0.02 \le t \le 0.3$	$0.3 \le t \le 3$
b_1	$-0.868212896 \times 10^{+0}$	$-0.823690626 \times 10^{+0}$
b_2	$-0.222195340 \times 10^{-1}$	$-0.112754582 \times 10^{+0}$
b_3	$0.158723437 \times 10^{+1}$	$0.868584479 \times 10^{+0}$
b_4	$-0.169824917 \times 10^{+0}$	$-0.484393529 \times 10^{-1}$
b_5	$-0.267888706 \times 10^{+0}$	$0.115382536 \times 10^{+0}$
b_6	$-0.559847125 \times 10^{+1}$	$-0.506459755 \times 10^{+0}$
b_7	$0.268988915 \times 10^{+0}$	$-0.560304632 \times 10^{-1}$
b_8	$-0.367165090 \times 10^{+0}$	$0.805291257 \times 10^{-1}$
b_9	$0.170389698 \times 10^{+1}$	$-0.659402843 \times 10^{-1}$
b_{10}	$0.156444560 \times 10^{+2}$	$0.143091603 \times 10^{+0}$
b_{11}	$-0.199168786 \times 10^{+0}$	$-0.811640959 \times 10^{-2}$
b_{12}	$-0.986479287 \times 10^{-1}$	$0.305077066 \times 10^{-1}$
b_{13}	$0.130280266 \times 10^{+1}$	$-0.286042837 \times 10^{-1}$
b_{14}	$-0.401533575 \times 10^{+1}$	$0.138469654 \times 10^{-1}$
b_{15}	$-0.164817774 \times 10^{+2}$	$-0.159050181 \times 10^{-1}$
近似誤差	$< 0.2\%$	$< 0.3\%$

と ρ_z のみの関数であることを示すことができるので (付録参照), t_1, t_2 と ρ_z の種々の値について ρ を数値計算によって求めることにより，文献 [10] と同様に次式で定義される F

$$F \equiv \rho_z / \rho \tag{22}$$

を，ρ および t_1, t_2 の関数として表現する近似式をもとめておき，この式から算出された ρ_z を用いて，x_1, x_2 の結合確率分布を (17) から求めることができる．

3.1 2 変量の変動係数が等しい場合 ($\delta_1 = \delta_2$)

先ず，2 変量の変動係数 δ_1，δ_2 が等しい場合を考える．この場合，$\delta \equiv \delta_1 = \delta_2$, $t \equiv t_1 = t_2$ とし，$\rho = 1$ の時に $\rho_1 = 1$ となることから，(21) で与えられる F を

$$\begin{aligned} F \;=\; & \{1 + (1-\rho)[b_1 + b_2(1-\rho) + b_3 t + b_4(1-\rho)^2 + b_5(1-\rho)t + b_6 t^2 + b_7(1-\rho)^3 \\ & + b_8(1-\rho)^2 t + b_9(1-\rho)t^2 + b_{10}t^3 + b_{11}(1-\rho)^4 + b_{12}(1-\rho)^3 t + b_{13}(1-\rho)^2 t^2 \\ & + b_{14}(1-\rho)t^3 + b_{15}t^4]\}^{-1} \end{aligned} \tag{23}$$

で近似するとし，(21) の右辺の数値計算により求めた，t, ρ_z, ρ の関係から最小二乗法により，係数 $b_1 \sim b_{15}$ を求める．ρ の範囲を $0.2 \le \rho \le 1$ として，$0.02 \le t \le 0.3$, $0.3 \le t \le 3$ の場合についてそれぞれ得られた係数を Table 1 に示す．$0.02 \le t \le 0.3$ の場合の近似誤差は 0.2 %以内，$0.3 \le t \le 3$ の場合の近似誤差は 0.3 %以内である．

3.2 2 変量の変動係数が異なる場合 ($\delta_1 \ne \delta_2$)

次に，2 変量の変動係数が異なる ($\delta_1 \ne \delta_2$ 即ち $t_1 \ne t_2$) 一般的な場合を考える．この場合，(21) の t_1, t_2 に関する対称性および，$t_1 = t_2$ の場合，$\rho = 1$ の時に $\rho_z = 1$ となることなどから，F を

$$\begin{aligned} F \;=\; & \{1 + (1-\rho)[a_1 + a_2(1-\rho) + a_3(t_1+t_2) + a_4(1-\rho)^2 + a_5(t_1^2+t_2^2) + a_6 t_1 t_2 \\ & + a_7(1-\rho)(t_1+t_2) + a_8(1-\rho)^3 + a_9(t_1^3+t_2^3) + a_{10}t_1 t_2(t_1+t_2) + a_{11}(1-\rho)(t_1^2+t_2^2) \\ & + a_{12}(1-\rho)t_1 t_2 + a_{13}(1-\rho)^2(t_1+t_2) + a_{14}(1-\rho)^4] \\ & + (t_1-t_2)^2[a_{15} + a_{16}(t_1+t_2) + a_{17}(t_1^2+t_2^2) + a_{18}t_1 t_2]\}^{-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

で近似することとし，(21) の右辺の数値計算により求めた t_1, t_2, ρ_z, ρ の関係から最小二乗法により，係数 $a_1 \sim a_{18}$ を求める．ρ の範囲を $0.2 \le \rho \le 1$ として，$0.02 \le t_1, t_2 \le 0.3$, $0.1 \le t_1, t_2 \le 0.8$, $0.3 \le t_1, t_2 \le 3$ の場合についてそれぞれ得られた係数を Table 2 に示す．$0.02 \le t_i \le 0.3$ の場合および $0.3 \le t_i \le 3$ の場合の近似誤差は 3 %以であり，$0.1 \le t_i \le 0.8$ の場合の近似誤差は 1 %以内である．

Table 2:

		$0.2 \quad \leq \quad \rho \quad \leq \quad 1$	
	$0.02 \leq t_1, t_2 \leq 0.3$	$0.1 \leq t_1, t_2 \leq 0.8$	$0.3 \leq t_1, t_2 \leq 3$
a_1	$-0.934905697 \times 10^{+0}$	$-0.894024550 \times 10^{+0}$	$-0.884827846 \times 10^{+0}$
a_2	$0.194341370 \times 10^{+0}$	$0.131128908 \times 10^{+0}$	$-0.797979309 \times 10^{-1}$
a_3	$0.108328964 \times 10^{+1}$	$0.547945038 \times 10^{+0}$	$0.440407644 \times 10^{+0}$
a_4	$-0.600769833 \times 10^{+0}$	$-0.370786198 \times 10^{+0}$	$0.252060140 \times 10^{+0}$
a_5	$0.218968277 \times 10^{+1}$	$0.385195440 \times 10^{+0}$	$-0.159603264 \times 10^{+0}$
a_6	$-0.104660518 \times 10^{+2}$	$-0.146096190 \times 10^{+1}$	$-0.824651644 \times 10^{-1}$
a_7	$-0.594527207 \times 10^{+0}$	$-0.228726046 \times 10^{+0}$	$0.147349173 \times 10^{-2}$
a_8	$0.806955003 \times 10^{+0}$	$0.352572233 \times 10^{+0}$	$-0.570860557 \times 10^{+0}$
a_9	$-0.741056408 \times 10^{+1}$	$-0.478734321 \times 10^{+0}$	$0.218483277 \times 10^{-1}$
a_{10}	$0.111313475 \times 10^{+2}$	$0.544256552 \times 10^{+0}$	$0.103835405 \times 10^{-1}$
a_{11}	$0.149746857 \times 10^{+1}$	$0.110584446 \times 10^{+0}$	$-0.806993812 \times 10^{-2}$
a_{12}	$0.188815596 \times 10^{+0}$	$0.138808684 \times 10^{+0}$	$-0.227230923 \times 10^{-2}$
a_{13}	$-0.319286908 \times 10^{-1}$	$0.100090544 \times 10^{+0}$	$0.370200567 \times 10^{-1}$
a_{14}	$-0.461362875 \times 10^{+0}$	$-0.224780635 \times 10^{+0}$	$0.279876327 \times 10^{+0}$
a_{15}	$-0.111597722 \times 10^{+2}$	$-0.208292225 \times 10^{+1}$	$-0.247014944 \times 10^{+0}$
a_{16}	$0.433871166 \times 10^{+2}$	$0.283955920 \times 10^{+1}$	$0.125500664 \times 10^{+0}$
a_{17}	$-0.544327626 \times 10^{+2}$	$-0.120135185 \times 10^{+1}$	$-0.185053730 \times 10^{-1}$
a_{18}	$-0.731909808 \times 10^{+2}$	$-0.172180531 \times 10^{+1}$	$-0.253897014 \times 10^{-1}$
近似誤差	$< 3\%$	$< 1\%$	$< 3\%$

2 分岐のダイバーシティ計算をする場合に，ダイバーシティブランチの t が異なる場合，一つのモデル [(24) 式] で F，即ち相関係数，が表現できる必要がある．一般的なダイバーシティ計算を行う場合に，2 つのブランチの t が大きく異なることはあまりないと考えられるが，Table 2 の t の領域に重なりがない場合，t_1 と t_2 が領域の境界をまたがっている場合，相関係数の計算ができなくなる．このようなことが起るのをできるだけ避けるために，Table 2 の近似モデルの t_1, t_2 の 3 つの領域の間にある程度の重なりを持たせてある．

4　おわりに

細矢のM分布に従う相関のある 2 変量について，Rosenblatt 変換を施すことにより得られる結合等価標準正規分布を介して，結合確率分布を求める方法を示した．このようにして得られた結合確率密度関数を用いることにより，降雨減衰が細矢の M 分布に従う 2 伝搬路のダイバーシティ特性の計算等が可能となる．本手法は，細矢のM分布に従う降雨減衰を蒙る地上や衛星の回線の各種ダイバーシティ計算に有効と考えられる．

付録

(21) より

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sigma_1}F_1^{-1}(1-\Phi(z_1)) - t_1\right]\left[\frac{1}{\sigma_2}F_2^{-1}(1-\Phi(z_2)) - t_2\right]\phi(z_1, z_2, \rho_z)dz_1dz_2 \tag{25}$$

ここで，$G(x) = \exp(-x)/x$ と置くと

$$F_i(x_i) = p_i u_i G(u_i x_i) \tag{26}$$

であるので, $P = F_i(x_i)$ の逆関数 $F_i^{-1}(P)$ は $G(x_i)$ の逆関数 $G^{-1}(P)$ を用いて

$$F_i^{-1}(P) = \frac{1}{u_i}G^{-1}\left(\frac{P}{p_i u_i}\right) \tag{27}$$

と表すことができるので

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sigma_1 u_1}G^{-1}\left(\frac{1-\Phi(z_1)}{p_1 u_1}\right) - t_1\right]\left[\frac{1}{\sigma_2 u_2}G^{-1}\left(\frac{1-\Phi(z_2)}{p_2 u_2}\right) - t_2\right]\phi(z_1, z_2, \rho_z)dz_1dz_2$$

となる．ここで，σ_i, p_i, u_i の間には

$$\begin{aligned}\sigma_i u_i &= \frac{2x_i^* \sigma_i}{\sigma_i^2 + m_i^2 - {x_i^*}^2} \\ &= \frac{2g(t_i)}{1 + t_i^2 - g(t_i)^2} \qquad (28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_i u_i &= \frac{2{x_i^*}^2}{\sigma_i^2 + m_i^2 - {x_i^*}^2} \exp\left(\frac{2{x_i^*}^2}{\sigma_i^2 + m_i^2 - {x_i^*}^2}\right) \\ &= \frac{2g(t_i)^2}{1 + t_i^2 - g(t_i)^2} \exp\left(\frac{2g(t_i)^2}{1 + t_i^2 - g(t_i)^2}\right) \qquad (29)\end{aligned}$$

$$x_i^* = \sigma_i g(t_i) \qquad (30)$$

$$t_i = \delta_i^{-1} \qquad (31)$$

の関係が成り立つので [1]，(21) の右辺は，$t_1(=\delta_1^{-1}), t_2(=\delta_2^{-1})$ および ρ_z のみに依存することがわかる．また，$y = G(x)$ の逆関数 $G^{-1}(y)$ については，$-15 \le \ln(y) \le 8$ の範囲における多項式近似係数が文献 [4] に与えられている．

References

[1] 細矢良雄，“日本各地の 1 分間雨量分布の一推定法,” 信学論 (B), vol. J71-B, no. 2, pp. 256–262, Feb. 1988.

[2] 小野健一，唐沢好男，“気象庁の 1 分間降雨量データを用いた日本各地における 1 分間降雨強度特性と最適な近似モデルに関する考察,” 信学論 (B), vol. J89-B, no. 3, pp. 361–372, Mar. 2006.

[3] C. Ito and Y. Hosoya, “A worldwide rain attenuation prediction method which uses simplified Moupfouma distribution and regional climatic parameters,” Proc. of 2002 Interim International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP i-02), Yokosuka, Japan, Nov. 26-28, 2002.

[4] 伊藤知恵子，細矢良雄，“M 分布と地域気候パラメータを用いた世界的な降雨減衰分布推定法の提案,” 信学論 (B), vol. J87-B, no. 7, pp. 979–989, July 2004.

[5] 真鍋武嗣，中條渉，“細矢の M 分布に従う相関のある 2 変量の結合確率分布,” 2007 年電子情報通信学会総合大会, 名城大学, Mar. 20-23, 2007.

[6] F. Moupfouma, “Distribution statistique des intensités de pluie et des affaiblissements dûs à la pluie en climat équatorial et tropical” *Ann. Telecommun,* vol. 37, no. 3-4, pp. 123–128, Mar.-Apr. 1982.

[7] F. Moupfouma, “Empirical model for rainfall rate distribution,” *Electron. Letters*, vol. 18, no. 11, pp. 460-461, May 1982.

[8] M. R. Rosenblatt, “Remarks on a multivariate transformation,” *Ann. Math. Statist.*, vol. 23, no. 3, pp. 470–472, Sep. 1952.

[9] A. H.-S. Ang and W. H. Tang, *Probability Concepts in Engineering and Design: Decision, Risk, and Reliability,* Appendix B, John Wiley and Sons, 1964. (伊藤学他訳，土木・建築のための確率・統計の応用，　丸善，1981.)

[10] A. D. Kiureghian and P.-L. Liu, “Structural reliability under incomplete probability information,” *J. Eng. Mech. ASCE,* vol. 112, no. 1, pp. 85–104, Jan. 1986.